Équation de la chaleur sur le cercle

On pose $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Pour $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$, on considère l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{T} \\ u(0,.) = u_0 & \text{dans } L^2(\mathbb{T}) \end{cases} \tag{$*$}$$

Théorème 1. *Il existe une unique solution u de $(*)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{T}$, avec $u(t,.)$ tendant vers u_0 dans $L^2(\mathbb{T})$ quand t tend vers 0.*

Démonstration.

Étape 1 : Analyse

Soit u une solution de $(*)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{T}$, avec $u(t,.)$ tendant vers u_0 dans $L^2(\mathbb{T})$ quand t tend vers 0. On peut alors écrire sa série de Fourier, qui converge normalement :

$$\forall\,(t,x) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{T},\ u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(t)\,e^{inx} \quad \text{où} \quad \forall\,n \in \mathbb{Z},\ c_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t,x)\,e^{-inx}\,dx$$

Comme $(t,x) \mapsto u(t,x)\,e^{-inx}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ en t, par dérivation sous l'intégrale, on obtient :

$$c_n'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\,e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)\,e^{-inx}\,dx$$

Par intégration par partie et périodicité de $u(t,.)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)$, on a :

$$c_n'(t) = \frac{in}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\,e^{-inx}\,dx = \frac{-n^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t,x)\,e^{-inx}\,dx = -n^2 c_n(t)$$

On en déduit alors que $c_n(t) = c_n^0 e^{-n^2 t}$ avec $c_n^0 \in \mathbb{R}$. Fixons $t > 0$, et appliquons la formule de Parseval à $x \mapsto |u(0,x) - u(t,x)|$, en notant $c_n(u_0)$ le n-ième coefficient de Fourier de u_0 :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(u_0) - c_n(t)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(0,x) - u(t,x)|^2\,dx$$

Or, comme $|u(0,x) - u(t,x)|$ est bornée, on a la convergence de l'intégrale vers 0 par convergence dominée. On en déduit alors que $c_n(t)$ converge vers $c_n(u_0)$. On a donc $c_n^0 = c_n(u_0)$ par unicité de la limite. On peut écrire :

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(u_0) e^{-n^2 t} e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_0(y)\,e^{-iny}\,dy\,e^{-n^2 t} e^{inx} = \int_0^{2\pi} u_0(y) K(t, x-y)\,dy$$

On a posé $K(t,x-y) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2 t} e^{in(x-y)}$, le noyau de la chaleur. Une potentielle solution serait donc unique et donnée par la forme ci-dessus.

Étape 2 : Synthèse

Définissons u par l'expression trouvée précédemment, et vérifions que u est bien solution de $(*)$.
Posons $K_n(t,x) = \frac{1}{2\pi} e^{-n^2 t} e^{inx}$, de sort à avoir $K = \sum_{n\in\mathbb{Z}} K_n$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, $k, l \in \mathbb{N}$ et $0 < a < t$ on a alors :

$$\left| \frac{\partial^{k+l}}{\partial t^k \partial x^l} K_n(t,x) \right| = \left| \frac{1}{2\pi} (-n^2)^k (in)^l e^{-n^2 t} e^{inx} \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} n^{2k+l} e^{-n^2 a}$$

Par dérivation sous l'intégrale, K est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{T}$, avec de plus $\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}$.

Ensuite, u s'écrit comme :

$$u(t,x) = \int_0^{2\pi} u_0(y) K(t, x-y)\, dy$$

L'intégrant est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en t et en x. Pour $0 < a < t$ on a :

$$\left| \frac{\partial^{k+l}}{\partial t^k \partial x^l} u_0(y) K(t, x-y) \right| \leqslant C |u_0(y)| \quad \text{où} \quad C = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} n^{2k+l} e^{-n^2 a}$$

Le membre de droite est intégrable sur $[0, 2\pi]$ car $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$, donc u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a, +\infty[\times \mathbb{T}$ pour tout $a > 0$, donc sur $\mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{T}$. De plus, u vérifie bien l'équation de la chaleur.

Il reste la condition au bord : Par la formule de Parseval, il suffit de montrer que $\|c_n(u(t,.)) - c_n(u_0)\|_2$ tend vers 0 quand t tend vers 0. Or :

$$\|c_n(u(t,.)) - c_n(u_0)\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(u_0) - c_n(u_0) e^{-n^2 t}|^2 \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(u_0)|^2 |1 - e^{-n^2 t}|^2$$

Comme $|1 - e^{-n^2 t}| \leqslant 1$ pour $t > 0$, on peut appliquer la convergence dominée qui donne alors le résultat voulu.
$\square$

Références

[Can09] Bernard Candelpergher. *Calcul intégral.* Cassini, 2009